（別紙）

タイトル	2022 年度 特別選抜(学校推薦型選抜・帰国生選抜) 共同教育学部(自然科学系 数学専攻) 小論文・面接
評価の ポイント	(小論文の評価のポイント) • 与えられた条件から結論を導く課程を筋道立てて考えることができる。 • 高校数学(数Ⅲの内容を含む。)の正確な推論ができる。 • 解決の課程を分かりやすい形で説明できる。 (面接の評価のポイント) • 数学科の教員としての資質がある。 • 数学に関する基本事項を理解しており，適切な場面で活用することができる。 • 数学に関する質問に対し，返答内容が的確である。

2022 年度 学校推薦型選抜・帰国生選抜 小論文 (数学)

受験番号		氏名	

$\boxed{1}$ 自然数 n に対して，関数

$$f_n(x) = e^{\frac{x}{10}} - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{10}\right)^k$$

を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ のとき，$f_1(x) > 0$，すなわち，$e^{\frac{x}{10}} - 1 - \frac{x}{10} > 0$ であることを示せ。

(2) $f'_{n+1}(x)$ を $f_n(x)$ を用いて表せ。

(3) すべての自然数 n および $x > 0$ を満たすすべての実数 x に対して $f_n(x) > 0$ が成り立つことを示せ。

(4) $e^{\frac{1}{5}} > 1.221$ が成り立つことを示せ。

[解答欄]

(1) $x > 0$ のとき，$e^x > 1$ であることから，$f'_1(x) = \frac{1}{10}e^{\frac{x}{10}} - \frac{1}{10} > 0$ を得る。これと，$f_1(0) = 0$ より題意が示された。

(2) $f_{n+1}(x) = e^{\frac{x}{10}} - 1 - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{10}\right)^k$ より，

$$\begin{aligned} f'_{n+1}(x) &= \frac{1}{10}e^{\frac{x}{10}} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{x}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{10}e^{\frac{x}{10}} - \frac{1}{10} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{x}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{10}\left\{ e^{\frac{x}{10}} - 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \left(\frac{x}{10}\right)^i \right\} = \frac{1}{10} f_n(x) \end{aligned}$$

(3) n に関する数学的帰納法により証明する。

- $n = 1$ のときに成立すること，すなわち，すべての正の実数 x に対して $f_1(x) > 0$ であることは，(1) で示されている。
- すべての正の実数 x に対して $f_n(x) > 0$ と仮定する。(2) より，$x > 0$ のとき $f'_{n+1}(x) = \frac{1}{10} f_n(x) > 0$ である。$f_{n+1}(0) = 0$ と合わせて，$f_{n+1}(x) > 0$ が成立する。

以上より，題意が示された。

(4) 前問 (3) の結果を $x = 2$ の場合に適用すると，任意の自然数 n について，

$$f_n(2) = e^{\frac{2}{10}} - 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{2}{10}\right)^k > 0$$

であり，変形して，

$$e^{\frac{1}{5}} > 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{2}{10}\right)^k.$$

この式の $n = 3$ の場合を考えると，

$$e^{\frac{1}{5}} > 1 + \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{4/3}{1000} = 1.22133...$$

となり，題意が示された。

得点	

受験番号		氏名	

$\boxed{2}$ xyz 空間に球 $S : x^2+y^2+z^2 \leqq 1$ と平面 $L : x+y+z=a$ がある。ただし，a は正の実数とする。

(1) 球 S と平面 L が交わる（接する場合も含む）ための a の値の範囲を求めよ。

(2) a が (1) の範囲にあるとする。球 S を 平面 L で切り 2 つの立体に分けたとき，体積が大きい方の立体の体積 V を求めよ。

[解答欄]

(1) 球 S と 平面 L が接するとき、接点は直線 $x=y=z=t$ と球との交点である.

$$t^2+t^2+t^2=1$$

であることから，$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$.
点 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ が平面上にあるとき $a=\sqrt{3}$ であることから，

$$0 < a \leqq \sqrt{3}.$$

(2) 直線 $x=y=z=t$ と平面 $L : x+y+z=a$ との交点は，

$$t+t+t=a$$

より $t=\frac{a}{3}$. よって，原点から平面 $L : x+y+z=a$ までの距離は，

$$\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

求める立体の体積 V は $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad(-1 \leqq x \leqq \frac{a}{\sqrt{3}})$ を x 軸の周りに回転させた図形の体積に等しい．よって

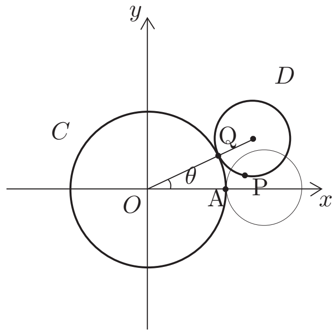
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} y^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} (1-x^2) dx \\ &= \pi \left[x-\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\pi}{3}(\sqrt{3}a-\frac{\sqrt{3}}{9}a^3+2). \end{aligned}$$

得点	

受験番号		氏名	

3

原点を中心とする半径 2 の円を C とし，円 C に点 A$(2,0)$ で外側から接する半径 1 の円を D とする。また，円 D 上に固定された点 P を考える。点 P は最初は点 A に重なっており，円 D が円 C の周りを接したまま，すべらずに反時計回りに動くとき点 P が描く曲線を E とする。ただし,「すべらずに反時計回りに動く」とは，右図のように 2 つの円の接点 Q に対し，円 C 上の孤 AQ と円 D 上の孤 PQ の長さが等しい状態を保ちながら円 D が動くことを意味する。

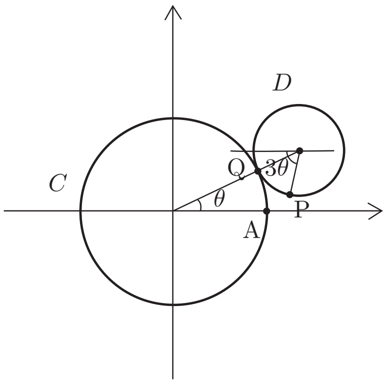


(1) 曲線 E が点 $(0,4)$, 点 $(-2,0)$ を通ることを説明せよ。

(2) 曲線 E の x 軸より上の部分が，円弧 (円周の一部) ではないことを示せ。

[解答欄]

(1)



円 D の中心が $(3\cos\theta, 3\sin\theta)$ にあるとき，弧 AQ の長さは 2θ であり，これが弧 QP の長さに等しいので，点 P の座標は

$$(3\cos\theta - \cos 3\theta, 3\sin\theta - \sin 3\theta)$$

である [左図参照]。すなわち，曲線 E は媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = 3\cos\theta - \cos 3\theta \\ y = 3\sin\theta - \sin 3\theta \end{cases}, [0 \leq \theta < 2\pi] \quad \cdots (*)$$

と表される。

$(*)$ に $\theta = \frac{\pi}{2}$ を代入すると,

$$x = 3\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{3\pi}{2} = 0, \ \ y = 3\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} = 4$$

となるので，曲線 E は点 $(0,4)$ を通る。また，$(*)$ に $\theta = \pi$ を代入すると,

$$x = 3\cos\pi - \cos 3\pi = -2, \ \ y = 3\sin\pi - \sin 3\pi = 0$$

となるので，曲線 E は点 $(-2,0)$ を通る。

(2) 曲線 E の x 軸より上の部分を E^+ と表す。E^+ が円の一部であると仮定する。

E^+ の中心を (x,y), 半径を r とおくと，E^+ は 3 点 $(\pm 2, 0), (0,4)$ を通るので，(x,y) はこれら 3 点から等距離にある点である。したがって,

$$(x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2 + y^2 = x^2 + (y-4)^2$$

を解いて，$(x,y) = (0, \frac{3}{2})$。また，$r^2 = 4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. 以上より，$E^+$ を表す式は

$$x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \qquad \cdots (**)$$

となるが，$(*)$ に $\theta = \frac{\pi}{3}$ を代入すると

$$x = 3\cos\frac{\pi}{3} - \cos\pi = \frac{5}{2}, \ \ y = 3\sin\frac{\pi}{3} - \sin\pi = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

であり，式 $(**)$ を満たさない。これは矛盾であり，E^+ は円の一部ではない。

得点	