数　　学

氏名	

受験番号	

1　p，q を実数の定数とする。3次方程式 $x^3+px^2+qx+1=0$ が虚数解 α と $\dfrac{1}{\alpha}$ をもつとき，以下の問いに答えよ。

（1）$p=q$ が成り立つことを示せ。

（2）定数 p の値の範囲を求めよ。

［解答欄］

(1) 題意より $\begin{cases}\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+1=0 & \cdots\cdots ① \\ \alpha^{-3}+p\alpha^{-2}+q\alpha^{-1}+1=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

②$\times\alpha^3$ より　$1+p\alpha+q\alpha^2+\alpha^3=0$

① との差をとり　$p(\alpha^2-\alpha)+q(\alpha-\alpha^2)=0$ ― ③

α は虚数であるので $\alpha^2-\alpha=\alpha(\alpha-1)\neq 0$．したがって ③ より $p-q=0$

よって $p=q$．

(2) $p=q$ のとき，3次方程式は

$x^3+p(x^2+x)+1=(x+1)(x^2-x+1)+px(x+1)$

$=(x+1)(x^2+(p-1)x+1)=0$

これより虚数解は $x^2+(p-1)x+1=0$ ― ④ の解であらねばならず，

虚数解をもつ $\Longleftrightarrow D=(p-1)^2-4=(p-3)(p+1)<0 \Longleftrightarrow -1<p<3$

④ の解を α,β とするとき，解と係数の関係より $\alpha\beta=1$．

よって虚数解は α と $\dfrac{1}{\alpha}$ となる．

得点	

数　　学

氏名	

受験番号	

2　以下の問いに答えよ。

（1）3次方程式 $2x^3-7x^2-a=0$ が異なる3個の実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

（2）n を正の整数とするとき，$2n^3-7n^2$ を最小にする n を求めよ。

[解答欄]

(1) $y=2x^3-7x^2$ と $y=a$ の共有点の個数を調べる.

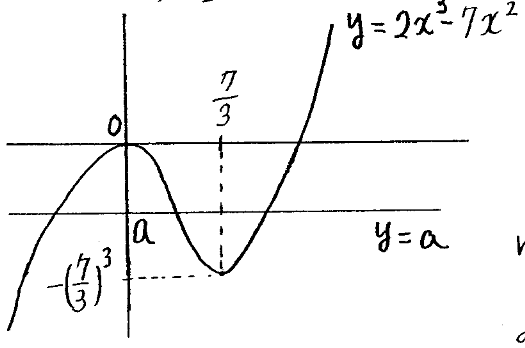
$y=2x^3-7x^2$ のグラフは，$y'=6x^2-14x=2x(3x-7)$

および増減表

x		0		$\frac{7}{3}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$y(\frac{7}{3})$	$\nearrow$

$$\left(\begin{aligned} y\left(\tfrac{7}{3}\right) &= 2\left(\tfrac{7}{3}\right)^3-7\left(\tfrac{7}{3}\right)^2=\left(\tfrac{7}{3}\right)^2\left(\tfrac{14}{3}-7\right) \\ &= -\left(\tfrac{7}{3}\right)^3 \end{aligned}\right)$$

から



したがって $-\left(\frac{7}{3}\right)^3<a<0$ のとき

3つの異なる共有点をもつ

ゆえに $2x^3-7x^2-a=0$ が異なる3個の実数解をもつのは.

$$-\left(\frac{7}{3}\right)^3<a<0.$$

(2) $y=2x^3-7x^2$ $(x\geqq 0)$ のグラフより $2n^3-7n^2$（n：正の整数）が最小となるのは. $2<\frac{7}{3}=2.333\cdots<3$ から

$n=2$ のとき, $n=3$ のとき のどちらかである.

$y(2)=16-28=-12$, $y(3)=2\times 27-7\times 9=-9$

したがって $n=2$ のとき $2n^3-7n^2$（n：正の整数）は最小となる.

得点	

数　　　学

氏名		受験番号	

3　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は次の条件によって定められている。

すべての自然数 n に対して a_n, b_n はともに整数で, $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2}\,b_n$

このとき以下の問いに答えよ。

（1）a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ。

（2）a_{n+1}, b_{n+1} それぞれを, a_n と b_n を用いて表せ。

（3）n を自然数とするとき, $(3-2\sqrt{2})^n = a_n - \sqrt{2}\,b_n$ を示せ。

［解答欄］

(1) $3+2\sqrt{2} = a_1+\sqrt{2}b_1$. a_1, b_1 は整数より $a_1=3$, $b_1=2$

$(3+2\sqrt{2})^2 = 9+8+12\sqrt{2} = 17+12\sqrt{2} = a_2+\sqrt{2}b_2$. a_2, b_2 は整数より $a_2=17$, $b_2=12$。

(2) $a_{n+1}+\sqrt{2}b_{n+1} = (3+2\sqrt{2})^{n+1} = (3+2\sqrt{2})^n(3+2\sqrt{2})$

$= (a_n+\sqrt{2}b_n)(3+2\sqrt{2}) = 3a_n+4b_n+\sqrt{2}(2a_n+3b_n)$

ここで $a_{n+1}, b_{n+1}, a_n, b_n$ は整数なので,

$a_{n+1} = 3a_n+4b_n$, $b_{n+1} = 2a_n+3b_n$。

(3) $n=1$ のときは $a_1=3$, $b_1=2$ より成立. $n=k$ のとき成立, すなわち $(3-2\sqrt{2})^k = a_k-\sqrt{2}b_k$ と仮定する. このとき

$(3-2\sqrt{2})^{k+1} = (3-2\sqrt{2})^k(3-2\sqrt{2}) = (a_k-\sqrt{2}b_k)(3-2\sqrt{2})$

$= 3a_k+4b_k-\sqrt{2}(2a_k+3b_k)$

(2)より $= a_{k+1}-\sqrt{2}b_{k+1}$　よって $n=k+1$ のときにも成立.

ゆえにすべての自然数についても成立.

得点	

数　　学

氏名	

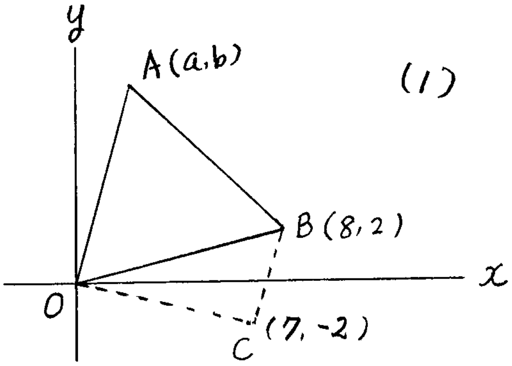
受験番号	

4　座標平面上の 4 点 O(0, 0)，A(a, b)，B(8, 2)，C(7, −2) を頂点とする四角形 OABC において，点 A は第 1 象限にあり，△OAB は正三角形であるとする。以下の問いに答えよ。

（1）a と b の値を求めよ。

（2）四角形 OABC の面積を求めよ。

[解答欄]



(1)　△OAB は，一辺の長さ $OB=\sqrt{8^2+2^2}$

$=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$ の正三角形であるから，

$OA=AB=\sqrt{68}$ も成立．

すなわち

$a^2+b^2=(a-8)^2+(b-2)^2=68$

ここで $(a-8)^2+(b-2)^2=a^2+b^2-16a-4b+68$ より a, b は

$\begin{cases} a^2+b^2=68 \cdots ① \\ 4a+b=17 \cdots ② \end{cases}$ を満たす．

② より $b=-4a+17$．① に代入し $a^2+(-4a+17)^2=68$．

よって $a^2+16a^2-136a+289=68$．

すなわち $17a^2-136a+221=0$．

17 で割って $a^2-8a+13=0$　ゆえに $a=\frac{8\pm\sqrt{12}}{2}=4\pm\sqrt{3}$

このとき $b=-4(4\pm\sqrt{3})+17=1\mp4\sqrt{3}$（複号同順）

点 A は第 1 象限にあるので，$a>0,\ b>0$ を満たす (a, b) は

$a=4-\sqrt{3},\ b=1+4\sqrt{3}$

(2)　△OAB の面積は，$2\sqrt{17}\times\sqrt{17}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=17\sqrt{3}$

線分 BC と x 軸の交点を D とおくと，$OD=7.5$

△ODB と △ODC のどちらも高さ 2 の三角形とみなせるので，

△OBC の面積は $7.5\times2=15$

ゆえに 四角形 OABC の面積は $17\sqrt{3}+15$．

得点	

数　　　学

氏名	

受験番号	

5 四面体OABCは次の2条件を満たすとする。

1．OA＝OB＝OC＝1

2．∠AOB＝∠AOC＝90°，∠BOC＝60°

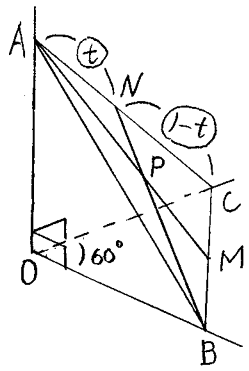
辺BCの中点をM，辺ACを$t:(1-t)$に内分する点をNとおき，線分AMと線分BNとの交点をPとおく。ただし，tは$0<t<1$を満たす実数とする。以下の問いに答えよ。

（1）$\overrightarrow{AP}$を$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$およびtを用いて表せ。

（2）$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{BN}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$および$t$を用いて表せ。

（3）OP⊥BNのとき，tの値を求めよ。

［解答欄］



(1) $\triangle ABC$ は $AB=AC=\sqrt{2}$ の二等辺三角形，
AMは$\angle BAC$の二等分線となるから

$BP:PN=AB:AN=1:t$

よって $\overrightarrow{AP}=\dfrac{\overrightarrow{AN}+t\overrightarrow{AB}}{1+t}=\dfrac{t\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AB}}{1+t}$.

(2) $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}=t\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

$=t(\vec{c}-\vec{a})-(\vec{b}-\vec{a})=(1-t)\vec{a}-\vec{b}+t\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\dfrac{t(\vec{c}-\vec{a})+t(\vec{b}-\vec{a})}{1+t}$ （(1)より）

$=\dfrac{1-t}{1+t}\vec{a}+\dfrac{t}{1+t}(\vec{b}+\vec{c})$

$OP\perp BN$ より 内積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BN}=0$ となるようにtを定めればよい.

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BN}=\left\{\dfrac{1-t}{1+t}\vec{a}+\dfrac{t}{1+t}(\vec{b}+\vec{c})\right\}\cdot\left\{(1-t)\vec{a}-\vec{b}+t\vec{c}\right\}$

ここで四面体OABCの条件より $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，
$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$. これらを上式の展開でもちいると

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BN}=\dfrac{(1-t)^2}{1+t}|\vec{a}|^2-\dfrac{t}{1+t}|\vec{b}|^2+\dfrac{t^2}{1+t}|\vec{c}|^2+\left(\dfrac{t^2}{1+t}-\dfrac{t}{1+t}\right)\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=\dfrac{1}{1+t}\left\{(1-t)^2-t+t^2+\dfrac{1}{2}(t^2-t)\right\}$

$=\dfrac{1}{1+t}\left(\dfrac{5}{2}t^2-\dfrac{7}{2}t+1\right)=\dfrac{1}{2(1+t)}(5t^2-7t+2)$

$=\dfrac{1}{1+t}(5t-2)(t-1)$

tは$0<t<1$を満たすので，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BN}=0$となるのは$t=\dfrac{2}{5}$.

得点	